5. RICO METODAS

Kraštinio uždavinio ekvivalentumas variaciniam uždaviniui

Kraštinis uždavinys

$$\begin{cases} \left(-py'\right)' + qy + f = 0, \\ y(a) = A, \;\; y(b) = B, \end{cases} \tag{1}$$

čia $p = p(x) > 0, \;\; q = q(x) \geq 0$.

Variacinis uždavinys

$$\begin{cases} \underset{y(x)}{\operatorname{extr}} \int_a^b py'^2 + qy^2 + 2fy\,dx, \\ \quad y(a) = A, \; y(b) = B. \end{cases} \tag{2}$$

Variacinio uždavinio (2) Eulerio lygtis yra kraštinio uždavinio (1) diferencialinė lygtis Todėl kiekvienas (2) uždavinio sprendinys yra ir (1) uždavinio sprendinys.

Atvirkščiai, tegul funkcija $y = y(x)$ yra kraštinio uždavinio (1) sprendinys ir

$$I(y) = \int_a^b py'^2 + qy^2 + 2fy\,dx,$$

Tada, kai $\eta(a) = \eta(b) = 0$

$$I(y+\eta) - I(y) = \int_a^b 2py'\eta' + p\eta'^2 + 2qy\eta + q\eta^2 + 2f\eta\,dx\,,$$

be to

$$\int_a^b py'\eta'\,dx = \underbrace{py'\eta\Big|_a^b}_{=0} - \int_a^b \eta\left(py'\right)'\,dx = -\int_a^b \eta\left(py'\right)'\,dx\,, \tag{3}$$

todėl

$$I(y+\eta) - I(y) = 2\int_a^b \underbrace{\left(-\left(py'\right)' + qy + f\right)}_{\equiv 0}\eta\;dx + \underbrace{\int_a^b p\eta'^2 + qy^2\;dx}_{\geq 0} \geq 0\,,$$

t.y. funkcija $y = y(x)$ suteikia funkcionalui (2) absoliutų minimumą. Taigi uždaviniai (1) ir (2) yra ekvivalentūs.

Rico metodas Dirichle uždaviniui

Remiantis įrodytu (1) ir (2) uždavinių ekvivalentumu pagrįstas Rico metodas – kraštinio uždavinio (1) sprendimas variaciniu metodu.

Artutinis variacinio uždavinio (1) sprendinys ieškomas pavidale

$$\tilde{y}(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x),$$

čia tiesiškai nepriklausomos funkcijos $\varphi_i(x)$ tenkina tokias kraštines sąlygas

$$\varphi_0(a) = A, \quad \varphi_0(b) = B,$$
$$\varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

o neapibrėžti koeficientai c_i randami sprendžiant tiesinių lygčių sistemą, kuri sudaroma remiantis funkcionalo (1) minimumo sąlygomis:

$$c_j: \quad \frac{\partial}{\partial c_j} I(\tilde{y}) = 0,\ \ j = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{4}$$

Čia $I(\tilde{y}) = \int_a^b p\tilde{y}'^2 + q\tilde{y}^2 + 2f\tilde{y}\,dx$. Funkcijas $\varphi_i(x)$ visuomet galima parinkti taip:

$$\varphi_0(x) = A + \frac{B-A}{b-a}(x-a)$$
$$\varphi_i(x) = (x-a)^i (x-b),\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Pavyzdys. Rico metodu spręsti kraštinį uždavinį:

$$\begin{cases} \left(-xy'\right)' + \left(x - \dfrac{1}{x}\right) y + x^3 \cos x = 0, \\ y(1) = 2,\ \ y(4) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

Sprendimas. Kai $n = 2$, tai

$$\varphi_0(x) = 2 - \frac{2}{3}(x-1),$$
$$\varphi_i(x) = (x-1)^i (x-4),\ i = 1, 2,$$
$$\tilde{y}(x) = 2 - \frac{2}{3}(x-1) + c_1(x-1)(x-4) + c_2(x-1)^2(x-4)\,.$$

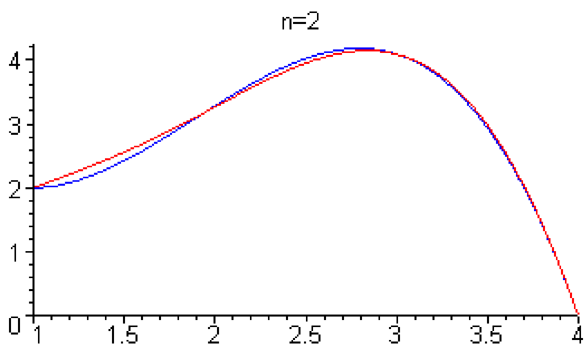
Iš (5) ir (1) $p = x,\ q = x - \dfrac{1}{x},\ f = x^3 \cos x$, $I(\tilde{y}) = \int_1^4 p\tilde{y}'^2 + q\tilde{y}^2 + 2f\tilde{y}\,dx$, todėl sistema (4) ir jos sprendinys

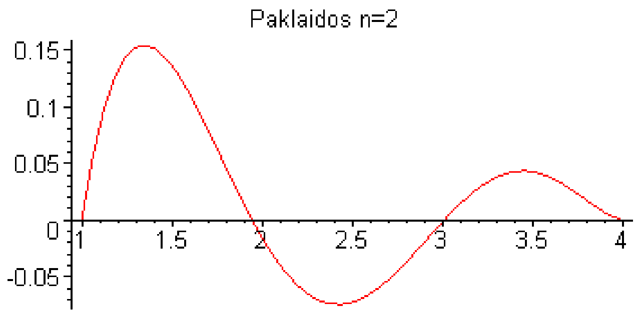
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial c_1} I(\tilde{y}) = 122{,}13 + 78{,}64 c_1 + 140{,}32 c_2 = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial c_2} I(\tilde{y}) = 265{,}92 + +140{,}32 c_1 + 315{,}40 c_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow\ c_1 = -0{,}236,\ c_2 = -0{,}738,$$

o artutinis kraštinio uždavinio sprendinys

$$\tilde{y}(x) = 2 - \frac{2}{3}(x-1) - 0{,}236(x-1)(x-4) - 0.738(x-1)^2(x-4)\,.$$

Paklaidos įvertinimui pateikiame tikslaus ir artutinio sprendinio ir jų skirtumo grafikus:





Rico metodas Neimano uždaviniui

Kraštinis uždavinys

$$\begin{cases} \left(-pY'\right)' + qY + F = 0, \\ Y'(a) = A_1,\ Y'(b) = B_1. \end{cases}$$

Pakeitus čia

$$Y = y + \frac{1}{b-a}\int A_1(x-a) + B_1(b-x)\,dx$$

gauname uždavinį su nulinėmis sąlygomis

$$\begin{cases} \left(-py'\right)' + qy + f = 0, \\ y'(a) = 0,\ y'(b) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Nagrinėkime atitinkantį jam variacinį uždavinį:

$$\begin{cases} \underset{y(x)}{\text{extr}} \int_a^b py'^2 + qy^2 + 2fy\,dx, \\ y'(a) = 0,\ y'(b) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Tai uždavinys su natūraliomis sąlygomis, nes lygtys $F_{y'} = \left(py'^2 + qy^2 + 2fy\right)'_{y'} = 2py' = 0$ ir $y' = 0$ ekvivalenčios, kadangi pagal prielaidą $p > 0$. Taigi variacinio uždavinio (7) sprendinys yra ir (6) uždavinio sprendinys.
Atvirkščiai, tegul funkcija $y = y(x)$ yra kraštinio uždavinio (6) sprendinys. Tada pastebėję, kad (3) lygybėje $y'(a) = y'(b) = 0$, matysime $y = y(x)$ suteikia integralui (7) absoliutų minimumą.

Variacinio uždavinio (7) artutinis sprendinys ieškomas pavidale

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x),$$

čia $\varphi_i(x)$ – tiesiškai nepriklausomos funkcijos, kurias galima parinkti taip, kad $\varphi_i'(a) = \varphi_i'(b) = 0$, pvz.:

$$\varphi_0(x) = 1,$$
$$\varphi_1(x) = (x-a)^2\,(2x + a - 3b),$$
$$\varphi_i(x) = (x-a)^i (x-b)^2 \;\; i = 2,3,\ldots,n.$$

arba

$$\varphi_0(x) = (x-a)^2 \left(x - b - \frac{b-a}{2}\right),$$
$$\varphi_1(x) = (x-b)^2 \left(x - a + \frac{b-a}{2}\right)$$
$$\varphi_i(x) = (x-a)^i (x-b)^2 \;\; i = 2,3,\ldots,n.$$

Koeficientų c_i radimui sudaroma sistema:

$$c_j : \quad \frac{\partial}{\partial c_j} I(\tilde{y}) = 0, \;\; j = 0,1,\ldots,n\,,$$

čia $I(\tilde{y}) = \int_a^b p\tilde{y}'^2 + q\tilde{y}^2 + 2f\tilde{y}\,dx.$

Pastabos

1. Diferencialinė lygtis

$$-py'' + ry' + qy + f = 0,\ p = p(x) > 0.$$

Padauginus ją iš $w = \frac{1}{p} e^{-\int \frac{r}{p} dx}$ pertvarkysime į

$$\left(-pwy'\right)' + qwy + fw = 0\,.$$

Iš tikrųjų

$$-\left(pwy'\right)' = -\left(y' e^{-\int \frac{r}{p} dx}\right)' = -e^{-\int \frac{r}{p} dx}\left(y'' - \frac{r}{p} y'\right) =$$

$$-\,w\left(py'' - ry'\right) = -pwy'' + rwy'.$$

2. Kraštinis uždavinys su mišriomis sąlygomis

$$\begin{cases} \left(-pY'\right)' + qY + F = 0, \\ Y'(a) = A_1,\ Y(b) = B \end{cases}$$

pakeitus

$$Y = y + A_1 x + B - A_1 b$$

suvedamas uždavinį su nulinėmis sąlygomis

$$\begin{cases} \left(-py'\right)' + qy + f = 0, \\ y'(a) = 0,\ y(b) = 0. \end{cases}$$

Kaip ir anksčiau nagrinėjant Neimano uždavinį įrodysime, kad jis ekvivalentus ((3) lygybėje $y'(a) = \eta(b) = 0$) variaciniam

$$\begin{cases} \underset{y(x)}{\text{extr}} \int_a^b py'^2 + qy^2 + 2fy\,dx, \\ \quad y'(a) = 0,\ y(b) = 0. \end{cases}$$

Šiuo atveju funkcijas $\varphi_i(x)$ galima parinkti taip kad $\varphi_i'(a) = 0$ ir $\varphi_i(b) = 0$, pavyzdžiui

$$\varphi_1(x) = (x-a)^2 - (b-a)^2\,,$$

$$\varphi_i(x) = (x-a)^i (x-b),\ i = 2, 3, \ldots, n.$$